Creditreform Rating AG

Technische Dokumentation

# Ermittlung von Portfolioverlustverteilungen

v.1.0
Neuss, July 2018

# Inhaltsverzeichnis

## Einleitung

Bei Ratings in den Bereichen „Institutional Investor Debt“ und „Structured Finance“ kommen quantitative Verfahren zum Einsatz, die im Ratingprozess die qualitativen Analysen unterstützen und erweitern. In dem vorliegenden Dokument wird der Einsatz eines Simulationsverfahrens zur Ermittlung von Portfolioverlusten und deren Verteilung beschrieben. Das Dokument ergänzt die öffentlich zugänglichen Ratingmethoden in den Bereichen „Institutional Investor Debt“ und „Structured Finance“ um eine allgemeine technische Dokumentation und grundlegende Annahmen, welche die statistisch-mathematischen Grundlagen und den von der CRA verwendeten Ansatz zur Ermittlung von Portfolioverlusten und deren Verteilung definieren.

Dies gibt beteiligten Parteien, Investoren und der interessierten Öffentlichkeit die Möglichkeit, ein Ratingurteil der CRA nachzuvollziehen. Dieses Dokument wird regelmäßig aktualisiert, um Änderungen in der Methodik widerzuspiegeln. Alle Ratingsystematiken und die technische Dokumentation sind auf der Internetseite www.creditreform-rating.de frei verfügbar.

Bei den zu beschreibenden Verfahren handelt es sich (1) um die zeitabhängige Darstellung der Ausfallwahrscheinlichkeit und (2) um die statistische Herleitung der (ein- und mehrperiodischen) Verlustverteilung eines Forderungsportfolios. Der Berechnung der interessierenden Größen liegt ein finanzmathematisches Modell aus dem Bereich der stochastischen Prozesse zugrunde. Es handelt sich hierbei um das sog. „Ein-Faktor-Modell“, einem Spezialfall der Asset-Wert-Modelle.[1]

## 1 Das Ein-Faktor-Modell

Im Ein-Faktor-Modell wird angenommen, dass der Wert eines Unternehmens oder eine Größe, die man als solchen interpretieren kann, von der Realisierung eines latenten Prozesses abhängt, welcher als stochastischer Prozess modelliert wird. Beschränkt man sich auf einen festen Zeithorizont, so reduziert sich die Betrachtung auf eine latente Variable, die mit $R_i$ bezeichnet sei, wobei angenommen wird, dass es *n* Unternehmen im Portfolio gibt und $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Die latente Variable ist abhängig von einem systematischen Faktor, der für alle Unternehmen im Portfolio gleich ist, und von einem idiosynkratischen Faktor, der für jedes Unternehmen unterschiedlich sein kann. Es sei *Y* der systematische Faktor und $\varepsilon_i$ der idiosynkratische Faktor $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Dann kann eine latente Variable $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ definiert werden durch

$$R_i = \sqrt{\varrho_i} \cdot Y + \sqrt{1 - \varrho_i} \cdot \varepsilon_i$$

[1] Eine theoretische Übersicht und die statistisch-mathematischen Grundlagen relevanter Modelle finden sich u.a. in:

- Bluhm, Overbeck (2007): *Structured Credit Portfolio Analysis, Baskets & CDOs*. Chapman & Hall/CRC. London.
- Trueck, Rachev (2009): *Rating Based Modeling of Credit Risk. Theory and Application of Migration Matrices*. Elsevier. Amsterdam.

Dabei wird angenommen, dass $Y, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \sim N(0,1)$ $i.i.d.$ gilt. $i.i.d.$ steht hier für „independently and identically distributed“. Es ist $\sqrt{\varrho_i}$ die Korrelation der latenten Variable $R_i$ und $Y$, also ein Maß für die Abhängigkeit der latenten Variablen vom systematischen Faktor. Diese kann man leicht berechnen über:

$$Corr(R_i, Y) = \frac{Cov(R_i, Y)}{\sigma(R_i) \cdot \sigma(Y)} = Cov(R_i, Y) = E[(R_i - E[R_i])(Y - E[Y])] = E[R_i Y] = \dots = \sqrt{\varrho_i}$$

Da $R_i$ eine Linearkombination von Zufallsvariablen mit $\sim N(0,1)$ ist, gelten die Verteilungsannahmen auch für $R_i$, was durch die Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz nachgeprüft werden kann.

## 1.1 Assetkorrelation

Da die Abhängigkeiten zwischen den Unternehmenswerten verschiedener Marktteilnehmer $i \neq j; i, j \in \{1, \dots, n\}$ wichtig sind, leitet man $Corr(R_i, R_j)$ aus den Abhängigkeiten der einzelnen Marktteilnehmer vom systematischen Faktor ab. Diese Abhängigkeit von $R_i$ und $R_j$ von dem systematischen Faktor führt zu einer Korrelation der Assets untereinander. Da $R_i$ und $R_j$ standardnormalverteilt sind, bildet die Korrelation die gesamte Abhängigkeitsstruktur ab. Es gilt dabei:

$$Corr(R_i, R_j) = \frac{Cov(R_i, R_j)}{\sigma(R_i) \cdot \sigma(R_j)} = Cov(R_i, R_j) = E\left[(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])\right] = E[R_i R_j] = \sqrt{\varrho_i \varrho_j}$$

## 1.2 Ausfallwahrscheinlichkeit

In Bezug auf $R_i = \sqrt{\delta_i} \cdot Y + \sqrt{1 - \delta_i} \cdot \varepsilon_i$ ist die Ausfallwahrscheinlichkeit so zu verstehen, dass ein Ausfall eintritt, wenn der Unternehmenswert $R_i$ unter eine kritische Schranke $c_i$ fällt. Definiert man die Ausfallwahrscheinlichkeit für Unternehmen $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $p_i$,dann gilt:

$$p_i = P(R_i < c_i)$$

Da annahmegemäß einen fester Zeithorizont vorliegt, kann man bei jeder Realisierung der Zufallsvariable $R_i$ feststellen, ob ein Ausfall innerhalb dieses Horizonts stattgefunden hat oder nicht, und wann dieser passiert ist. Da die Verteilungsfunktion $\Phi$ der Standardnormalverteilung stetig ist, gilt:

$$p_i = P(R_i \leq c_i) \Rightarrow c_i = \Phi^{-1}(p_i)$$

Mit den Annahmen und der Modellierung der latenten Variablen, kann man nun auf die Verteilung der Ausfälle schließen. Sei $D_i = \{R_i < c_i\}$ definiert als das Ereignis, dass die latente Variable unter die kritische Schranke $c_i$ fällt, das Unternehmen *i* also im festgelegten Zeithorizont ausfällt. Dann kann man eine Indikatorzufallsvariable definieren, die den Zustand „Ausfall / kein Ausfall“ angibt. Da diese Zufallsvariable nur zwei Ausprägungen hat, die man mit „Erfolg / kein Erfolg“ beschreiben kann, liegt eine Bernoulli-Verteilung zugrunde mit

$$1_{D_i} = \begin{cases} 1, & R_i < c_i \\ 0, & R_i \geq c_i \end{cases}$$

$P(1_{D_i} = 1) = P(R_i < c_i) = p_i$ ist dann die Erfolgswahrscheinlichkeit des Bernoulli Experiments.

Da bei der Bewertung von Marktteilnehmern auch Stressszenarien behandelt werden, ist es von Interesse, die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Unternehmens *i bedingt* auf verschiedene systematische Ausprägungen zu berechnen. Dieser systematische Faktor kann mit Größen wie dem Bruttoinlandsprodukt oder ähnlichen Makroökonomischen Faktoren interpretiert werden. Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit lässt sich wie folgt berechnen:

$$p_i(y) = P(R_i < c_i | Y = y) = P\left(\sqrt{\varrho_i} \cdot Y + \sqrt{1-\varrho_i} \cdot \varepsilon_i < c_i | Y = y\right) = P\left(\varepsilon_i < \frac{c_i - \sqrt{\varrho_i} \cdot Y}{\sqrt{1-\varrho_i}} \middle| Y = y\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{c_i - \sqrt{\varrho_i} \cdot y}{\sqrt{1-\varrho_i}}\right) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho_i} \cdot y}{\sqrt{1-\varrho_i}}\right)$$

## 2 Ausfallwahrscheinlichkeiten im Zeitverlauf

Die bisherigen Betrachtungen waren an einen festen Zeithorizont gebunden. Insbesondere wurde die Ausfallwahrscheinlichkeit nur auf einem Horizont von einem Jahr betrachtet. Als Grundlage für die Berechnung der zeitabhängigen Entwicklung der Ausfallwahrscheinlichkeiten dient die Ratingklassen-Migrationsmatrix der CRA. Diese hat typischerweise einen Zeithorizont von einem Jahr. Um diesen Zeithorizont zu flexibilisieren benutzt die CRA den Ansatz zeithomogener Markov-Ketten, um über die zugehörige Generator-Matrix kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeiten für beliebige Zeitpunkte abzuleiten.

Abbildung 1: Zeitstruktur der Ausfallwahrscheinlichkeiten

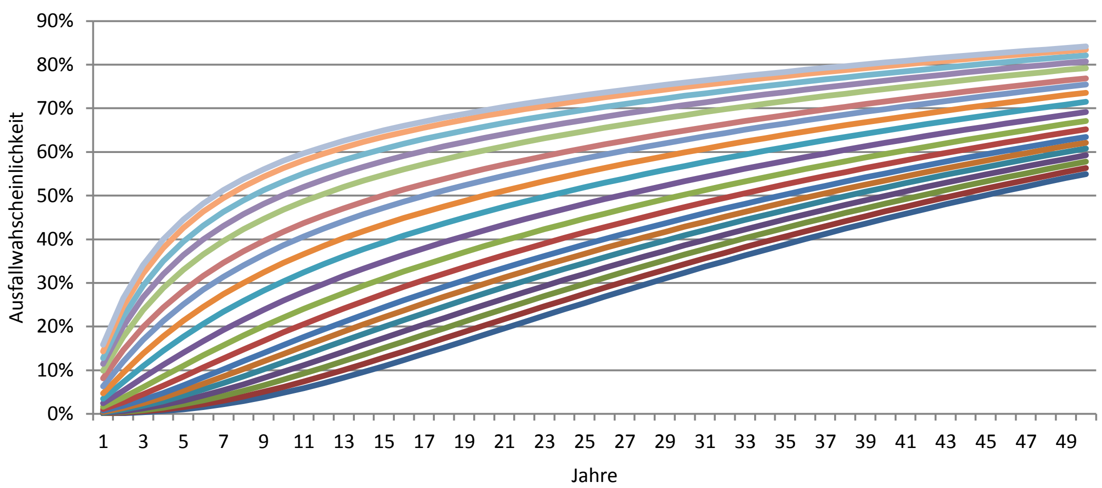
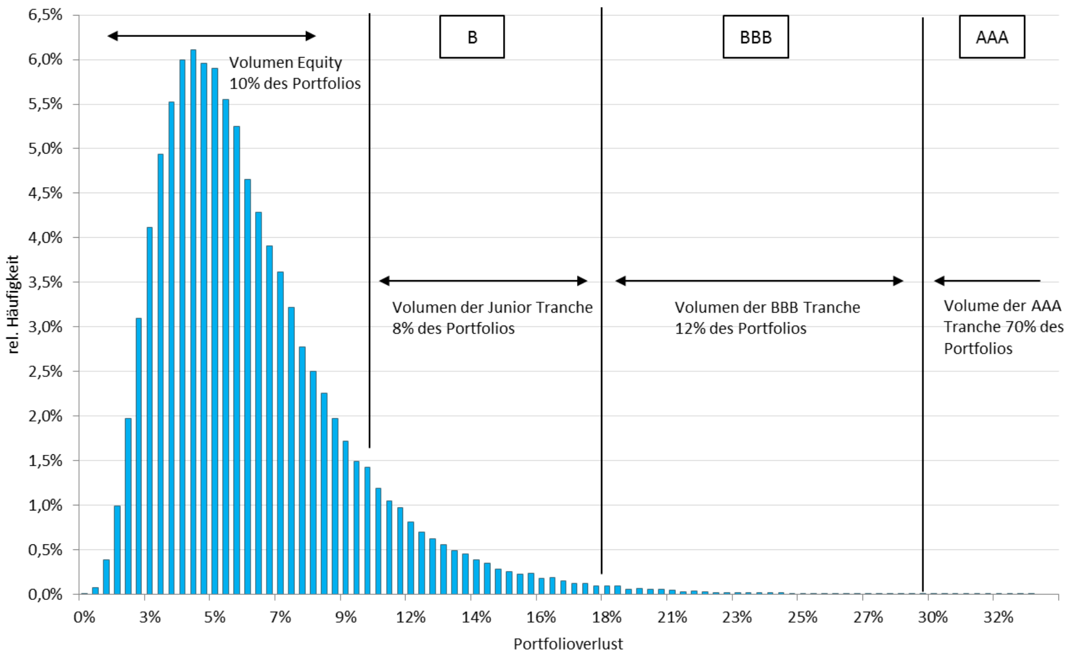



Abbildung 1 zeigt beispielhaft eine eigene „Term Structure“ für unterschiedliche Ratingklassen. Eine idealisierte Darstellung der derzeit verwendeten „Term Structure“, welche auf Basis der internen Daten von Creditreform kalibriert wurde, findet sich in Anhang 1.

# 3 Die Verlustverteilung

Die Verlustverteilung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Portfolioverlustes und entspricht der Summe der ausgefallenen Obligos unter Berücksichtigung der Verlustquoten. Als Ausfall zählt bereits die nicht vollständige und fristgerechte Bedienung einer Zahlungsverpflichtung.

Abbildung 2: Beispiel einer Verlustverteilung und relevante Zielgrößen




Die Parameter, die in die Berechnung der Verlustverteilung mit eingehen, sind die Ausfallwahrscheinlichkeiten, das Exposure bei Ausfall („Exposure at default“, EAD), der LGD („Loss given default“, Verlustquote) und die Asset- bzw. Ausfallkorrelation. Das Exposure ist hier der Betrag, der einem Ausfallrisiko zum Ausfallzeitpunkt ausgesetzt ist. Um die Verlustverteilung zu berechnen, nutzt man die Realisationen aus einer Monte-Carlo-Simulation. Dabei wird berücksichtigt, wie hoch der generierte Verlust bei Eintritt eines Default-Ereignisses (eines oder beider Unternehmen) ist. Die Asset- und Ausfallkorrelation wird berücksichtigt, weil die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit bei den vorliegenden Realisationen wie in 1.2. definiert ist, und $P(kein\ Ausfall) > (1 - P(Unt.1\ fällt\ aus)) \cdot (1 - P(Unt.2\ fällt\ aus))$, also die Wahrscheinlichkeit für keinen Ausfall größer ist, als wenn die Unternehmen unabhängig wären.

Die Verlustverteilung lässt sich als kumulierte Häufigkeitsverteilung der Verluste abbilden. An der Verlustverteilung kann man ablesen, welcher absolut generierte Verlust mit einer Wahrscheinlichkeit x% überschritten oder nicht überschritten wird, mithin lassen sich also Value-at-Risk Berechnungen durchführen. Weiterhin kann man einzelne Tranchen mit einer Ratingnote beurteilen, wenn man weiß, welchen Prozentteil sie im Portfolio einnehmen.

# 4 Anhang

Tabelle 1: Idealisierte PD-Term Structure (Stand: Juni 2018) | Quelle: CRA

| Ratinklasse / Jahre, PD | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC | C-CC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0% | 0.0% | 0.1% | 0.3% | 1.3% | 5.2% | 14.9% | 29.1% |
| 2 | 0.0% | 0.1% | 0.2% | 0.6% | 2.6% | 9.4% | 24.8% | 43.6% |
| 3 | 0.0% | 0.1% | 0.4% | 1.1% | 3.9% | 12.9% | 31.4% | 51.6% |
| 4 | 0.0% | 0.3% | 0.7% | 1.6% | 5.1% | 15.8% | 36.0% | 56.4% |
| 5 | 0.1% | 0.4% | 1.1% | 2.1% | 6.4% | 18.2% | 39.3% | 59.5% |
| 6 | 0.1% | 0.6% | 1.5% | 2.7% | 7.6% | 20.3% | 41.7% | 61.7% |
| 7 | 0.2% | 0.8% | 2.0% | 3.3% | 8.8% | 22.1% | 43.6% | 63.2% |
| 8 | 0.3% | 1.1% | 2.5% | 4.0% | 9.9% | 23.7% | 45.2% | 64.4% |
| 9 | 0.4% | 1.4% | 3.1% | 4.7% | 11.0% | 25.2% | 46.5% | 65.4% |
| 10 | 0.5% | 1.7% | 3.7% | 5.5% | 12.1% | 26.5% | 47.6% | 66.2% |
| 11 | 0.6% | 2.1% | 4.4% | 6.2% | 13.1% | 27.7% | 48.6% | 66.9% |
| 12 | 0.8% | 2.5% | 5.1% | 7.0% | 14.1% | 28.8% | 49.4% | 67.5% |
| 13 | 1.0% | 2.9% | 5.8% | 7.8% | 15.1% | 29.8% | 50.2% | 68.1% |
| 14 | 1.2% | 3.3% | 6.5% | 8.6% | 16.1% | 30.8% | 51.0% | 68.6% |
| 15 | 1.5% | 3.8% | 7.3% | 9.4% | 17.0% | 31.8% | 51.7% | 69.0% |
| 16 | 1.8% | 4.3% | 8.0% | 10.2% | 17.9% | 32.7% | 52.3% | 69.5% |
| 17 | 2.1% | 4.9% | 8.8% | 11.0% | 18.8% | 33.5% | 53.0% | 69.9% |
| 18 | 2.4% | 5.4% | 9.6% | 11.9% | 19.7% | 34.3% | 53.6% | 70.3% |
| 19 | 2.8% | 6.0% | 10.4% | 12.7% | 20.6% | 35.1% | 54.1% | 70.7% |
| 20 | 3.2% | 6.6% | 11.2% | 13.5% | 21.4% | 35.9% | 54.7% | 71.0% |

Abbildung 3: Idealisierte PD-Term Structure (Stand: Juni 2018) | Quelle: CRA